PENDUGAAN PARAMETER MODEL FAKTOR DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM *LIKELIHOOD*

Agus Priyanto
Mathematics Departement
State University of Jakarta

Abstract

Factor model, a statistical model that can be used for analizing interrelationship of variables. The purpose of factor model is inventing new variables as small number of factor than before. This thesis present parameters expectation of factor model using maximum likelihood methods. Maximalize likelihood function usually using iteration methods, EM (Expectation Maximization) algorithm. The result of expectation with EM (Expectation Maximization) algorithm are factor model parameters, loading factor and unique factor

Keyword*: Factor Model, EM Algorithm, Gaussians, Maximum Likelihood*.

1. Pendahuluan

Model faktor adalah pendekatan statistik yang dapat digunakan untuk menganalisis *interrelationship* sejumlah variabel dan untuk menjelaskan dimensi-dimensi (disebut faktor) apakah yang melandasi variabel-variabel tersebut dan mereduksinya (Simamora, 2005). Misalnya, aroma sabun, kelembutannya, disainnya, warna-warninya dapat disatukan menjadi faktor daya tarik fisik sabun. Kebersihan kulit, kelembutan kulit, kehalusan kulit dapat disatukan menjadi faktor daya tarik manfaat. Model faktor bertujuan untuk menemukan variabel baru yang disebut faktor yang jumlahnya lebih sedikit dibandingkan dengan jumlah variabel asli (Supranto, 2004), dimama variabel baru tersebut memuat sebanyak mungkin informasi yang terkandung di dalam variabel asli. Di dalam proses mereduksi jumlah variabel, informasi yang hilang harus seminimum mungkin. Secara matematis, model faktor mirip dengan regresi linear berganda, yaitu setiap variabel dinyatakan sebagai kombinasi linear dari faktor yang mendasari. Jumlah varian yang disumbangkan oleh suatu variabel dengan variabel lainnya yang tercakup dalam analisis disebut *communality*. Kovariansi antar variabel yang diuraikan, dinyatakan dalam suatu *common faktor* (faktor umum) dan faktor yang unik untuk setiap variabel, faktor-faktor ini tidak secara jelas terlihat oleh karena itu sering disebut varibel laten. Model faktor bisa ditulis sebagai berikut:

$$\boxed{\mathbf{X} = \Lambda\xi + \delta}$$

Untuk menyelesaikan model di atas yang harus dilakukan adalah melakukan pendugaan terhadap parameter-parameternya, dalam skripsi ini metode yang akan digunakan adalah metode maksimum *likelihood*, salah satu metode untuk memperoleh pendugaan yang memberikan hasil yang baik. Pendugaan Metode maksimum *likelihood* adalah metode yang memaksimumkan fungsi kemungkinan. Misalkan X_1, X_2, ..., X_n menyatakan contoh acak yang diambil dari suatu fungsi kepadatan probabilitas (*pdf*) yang dinyatakan dengan f(x, μ), dimana μ adalah parameter fungsi kepadatan tersebut, maka fungsi *likelihood* adalah:

$$\boxed{L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)}$$

Parameter dari model faktor yang akan diduga dengan metode maksimum *likelihood* adalah faktor *loading* (Λ) dan faktor unik (δ). Faktor *loading* adalah matriks koefisien pengaruh antara variabel dengan faktor; dengan entri konstanta yang belum diketahui, faktor unik adalah vektor yang tidak dapat diukur secara langsung tetapi berhubungan dengan variabel observasi. Masalah yang timbul sekarang adalah bagaimana cara menduga parameter-parameter dalam analisis faktor tersebut, upaya pendugaan parameter-parameter model tersebut memerlukan teknik analisis statistika yang mampu memberikan solusi bagi permasalahan yang ada. Maka menjadi salah satu aspek menarik yang ingin diketahui adalah pendugaan dengan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood, ML*) terhadap model faktor tersebut untuk dipelajari secara lebih rinci.

2. Landasan Teori

2.1 Distribusi Marjinal dan Bersyarat dari Gaussian

Misalkan untuk nilai vektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

dimana $X_1, X_2 \in$ R dan $\mathbf{X} : (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Dimana

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Asumsikan X_1 dan X_2 merupakan Gaussian multivariat bersama. Untuk X_1 memiliki $E(X_1) = \mu_1$ dan $Cov(X_1) = E\left[(X_1 - \mu_1)(X_1 - \mu_1)'\right] = \Sigma_{11}$, karena distribusi marjinal dari Gaussian merupakan dirinya sendiri maka distribusi marjinal dari X_1 adalah $X_1 \sim (\mu_1, \Sigma_{11})$, begitu juga unruk X_2.

Berdasarkan definisi dari distribusi Gaussian multivariat, maka $X_1 | X_2 \sim \left(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2}\right)$, dimana

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu)$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \tag{1}$$

$\mu_{1|2}$ dan $\Sigma_{1|2}$ sangat bermanfaat untuk pendugaan model faktor.

2.2 Asumsi-asumsi Model Faktor

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model Faktor adalah sebagai berikut: (Joreskog dan Sorborn, 1979)

a. $E(\delta) = 0$

b. $E(\delta_i\delta_j) = 0, \ \forall\ i \neq j$

$E(\boldsymbol{\delta}_i^2) = \theta$, $\forall$ i dengan $i = 1, 2;\ p$ dan $j = 1, 2, ..., p$. sehingga diperoleh hubungan:

$$Cov(\boldsymbol{\delta}) = E(\boldsymbol{\delta\delta}') = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \theta_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Theta}$$

c. $E(\xi) = 0$

d. $$Cov(\xi) = E(\xi\xi') = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \phi_{21} & 1 & & & \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdots & \phi_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}$$

dimana Φ adalah matriks korelasi antar variabel laten eksogenus berukuran $m \times m$

e. $Cov(\boldsymbol{\delta}, \xi) = E(\boldsymbol{\delta}\xi') = 0$

Dari $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}\xi + \boldsymbol{\delta}$ dengan mengunakan sifat nilai harapan dan asumsi-asumsi yang ada akan ditentukan hubungan koragam vektor X.

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma} &= E(\boldsymbol{\Lambda}\xi + \boldsymbol{\delta})(\boldsymbol{\Lambda}\xi + \boldsymbol{\delta})' \\ &= \boldsymbol{\Lambda\Phi\Lambda}' + \boldsymbol{\Theta} \end{aligned} \tag{2}$$

2.3 Model Faktor

Model faktor adalah suatu analisis peubah ganda yang biasanya digunakan pada penelitian yang mencakup sejumlah besar variabel (Johnson and Wichern, 1998). Tujuan dari analisis faktor adalah menentukan apakah suatu himpunan variabel dapat digambarkan berdasarkan jumlah faktor yang lebih sedikit daripada jumlah variabel observasi.

Model faktor mengekspresikan hubungan antara X_i, ξ_i, dan δ_i dimana X adalah kombinasi linear dari ξ, dan δ yang secara aljabar direpresentasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{12}\xi_2 + \ldots + \lambda_{1m}\xi_m + \delta_1 \\ X_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \lambda_{22}\xi_2 + \ldots + \lambda_{2m}\xi_m + \delta_2 \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ X_p &= \lambda_{p1}\xi_1 + \lambda_{p2}\xi_2 + \ldots + \lambda_{pm}\xi_m + \delta_p \end{aligned} \tag{3}$$

dengan:

a. ξ_i adalah faktor umum dimana $j = 1, 2, ..., m$ dengan ($m < p$)
b. λ_i adalah faktor *loading* dari variabel ke-*i* pada faktor umum ke-*j*, untuk $i = 1, 2, ..., p$ dan $j = 1, 2, ..., m$
c. δ_i adalah faktor unik dari variabel ke-*i*, untuk $i = 1, 2, ..., p$

Dengan asumsi:

a. $r_{\xi_j \delta_i} = 0, \forall\, i, j,$ dengan r menyatakan korelasi
b. $r_{\delta_j \delta_j} = 0, \forall\, j, k,$ dimana $j \neq k$
c. ξ_j dan δ_i mempunyai distribusi normal dengan rataan 0 dan varians 1 untuk setiap i dan *j*
d. Semua faktor saling bebas satu dengan yang lainnya dan juga saling bebas dengan m buah faktor umum.

Persamaan (3) dapat ditulis dalam bentuk notasi matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda\xi} + \boldsymbol{\delta} \tag{4}$$

Dengan:

a. $\mathbf{X}$ adalah vektor berdimensi p, $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_p \end{bmatrix}$
b. $\boldsymbol{\xi}$ adalah vektor variabel yang tidak dapat diobservasi (faktor umum) berdimensi m, $\boldsymbol{\xi}' = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \end{bmatrix}$ dengan distribusi N($\mathbf{0}$,$\mathbf{I}$}
c. $\boldsymbol{\delta}$ adalah vektor variabel yang tidak dapat diobservasi (faktor unik) berdimensi p, $\delta' = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_p \end{bmatrix}$
d. $\boldsymbol{\Lambda}$ matriks berukuran $p \times m$ dengan entri konstanta yang belum diketahui (faktor *loading*)

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \cdots & \lambda_{pm} \end{pmatrix}$$

Dari asumsi model faktor matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda\Phi\Lambda}' + \boldsymbol{\Theta}$. Lebih jauh lagi kita asumsikan bahwa faktor-faktor tidak saling berkorelasi maka $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$ dan persamaan (2) menjadi:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda\Lambda}' + \boldsymbol{\Theta} \tag{5}$$

Matriks Kovarians $\mathbf{\Sigma}$, merupakan fungsi dari parameter-parameter yang akan diduga (Bollen 1989). Matriks Kovarians menghasilkan faktor *loading*, merupakan koefisien yang digunakan untuk memahami arti dari faktor dan dapat digunakan untuk menilai keterandalan faktor. Nilai faktor *loading* yang besar menunjukkan korelasi yang kuat antara faktor dan indikator pengukurnya.

2.4 Pendugaan Parameter dari Analisis Faktor Maksimum dengan Maksimum *Likelihood*

Memaksimumkan fungsi *likelihood* biasanya dilakukan dengan metode iterasi Menurut Bollen (1989), pendugaan maksimum *likelihood* mempunyai sifat-sifat penting yaitu: tak bias secara asimtotis (ada kemungkinan akan berbias pada contoh kecil), konsisten, efisien secara asimtotis, invarian pada skala pengukuran (satuan pengukuran tidak mempengaruhi nilai dugaan parameter model). Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mendapatkan titik maksimum dari fungsi maksimum *likelihood*, dalam skripsi ini akan digunakan algoritma EM(*Expectation Maximization*) karena algoritma EM cukup sederhana dan memenuhi sifat monoton dan jika nilai awalnya positif maka nilai berikutnya positif.

Algoritma EM dimulai dengan tahap E (*Expectation*), yaitu tahap penetapan nilai awal Λ dan Θ sebarang dan positif, selanjutnya dianggap sebagai Λ^{lama} dan Θ^{lama}. Kemudian dilanjutkan dengan menghitung nilai harapan dari ln-*likelihood* E(L). Tahap berikutnya adalah tahap M (*Maximization*), yang digunakan untuk mendapatkan Λ^{baru} dan Θ^{baru} secara iterasi dengan cara memaksimumkan E(L). Jika

$$\left|L_{m+1}\left(\mathbf{\Lambda}^{baru},\mathbf{\Theta}^{baru}\right)-L_m\left(\mathbf{\Lambda}^{lama},\mathbf{\Theta}^{lama}\right)\right|>10^{-4}\left|L_m\left(\mathbf{\Lambda}^{lama},\mathbf{\Theta}^{lama}\right)\right|$$

artinya proses belum konvergen, maka nilai Λ^{baru} dan Θ^{baru} dianggap sebagai Λ^{lama} dan Θ^{lama} pada iterasi berikutnya, demikian proses ini dilanjutkan secara iterasi sampai konvergen.

Selanjutnya akan diduga parameter dari model faktor dengan metode seperti di atas. Misalkan terdapat $p \times 1$ vektor-vektor dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yang merepresentasikan contoh acak dan saling bebas, memiliki parameter Λ dan Θ sehingga fungsi ln-*likelihood*-nya adalah:

$$L\left(\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Theta}\right)=\ln\prod_{i=1}^{n}f\left(\mathbf{X}_i,\xi_i\left|\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Theta}\right.\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\mathbf{X}_i\left|\xi_i,\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Theta}\right.\right)$$

Distribusi dari $f\left(\mathbf{X}|\xi\right)$ adalah *joint multivariate Gaussian distribution*, $\mathbf{X}=\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\delta}$ dan dari persamaan (1) maka didapat, $E\left(\mathbf{X}|\xi\right)=\mathbf{\Lambda}\xi$ dan $Cov\left(\mathbf{X}|\xi\right)=\mathbf{\Theta}$

Sehingga fungsi maksimum *likelihood* untuk model faktor

$$L=\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\mathbf{\Theta}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}_i-\mathbf{\Lambda}\xi_i)'\mathbf{\Theta}^{-1}(\mathbf{X}_i-\mathbf{\Lambda}\xi_i)\right)$$

Dengan menggunakan sifat dari *trace*, $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}=tr\left[\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}'\right]$, sehingga persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut

$$L=-\frac{np}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln|\mathbf{\Theta}|-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{X}_i'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{X}_i-2\mathbf{X}_i'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\xi_i+tr\left[\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\xi_i\xi_i'\right]\right)$$

Selanjutnya ambil ekspektasi dari L berdasarkan $f\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i,\mathbf{\Lambda},\mathbf{\Theta}\right.\right)$ sehingga di dapat

$$L=-\frac{np}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln|\mathbf{\Theta}|-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{X}_i'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{X}_i-2\mathbf{X}_i'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}E\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)+tr\left[\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}E\left(\xi_i\xi_i'\left|\mathbf{X}_i\right.\right)\right]\right)\quad(6)$$

Kemudian persamaan (6) dimaksimalkan terhadap Λ dan Θ dimana $\frac{\partial\mathbf{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{B}}{\partial\mathbf{\Lambda}}=\mathbf{A}\mathbf{B}'$, $\frac{\partial tr\left[\mathbf{\Lambda}'\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{B}\right]}{\partial\mathbf{\Lambda}}=\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}\mathbf{B}+\mathbf{A}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{B}'$, $\frac{\partial tr\left[\mathbf{\Theta}^{-1}\right]}{\partial\mathbf{\Theta}^{-1}}=(\mathbf{\Theta})'$, dan $\frac{\partial\mathbf{A}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{B}}{\partial\mathbf{\Theta}^{-1}}=\mathbf{A}\mathbf{B}'$ maka dihasilkan

$$\mathbf{\Lambda}^{baru}=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_iE\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_i\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)\right)^{-1}$$

$$\mathbf{\Theta}^{baru}=\frac{1}{n}diag\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i'-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_iE\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)'\mathbf{\Lambda}'\right]$$

Nilai dari $E\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)$ dan $E\left(\xi\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)$ adalah

$$E\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)=\beta\mathbf{X}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{X}$$

$$E\left(\xi\xi'\left|\mathbf{X}\right.\right)=\mathbf{I}-\beta\mathbf{\Lambda}+\beta\mathbf{X}\mathbf{X}'\beta'$$

Maka kovariansnya

$$Cov\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}$$

3. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh, maka dapat disimpulkan bahwa:

Algoritma EM dimulai dengan tahap E (*Expectation*), yaitu tahap penetapan nilai awal Λ dan Θ sebarang dan positif, selanjutnya dianggap sebagai Λ^{lama} dan Θ^{lama}.

Kemudian dilanjutkan dengan menghitung nilai harapan dari ln-*likelihood* E(L). Tahap berikutnya adalah tahap M (*Maximization*), yang digunakan untuk mendapatkan Λ^{baru} dan Θ^{baru} secara iterasi dengan cara memaksimumkan E(L). Jika

$$\left|L_{m+1}\left(\mathbf{\Lambda}^{baru},\mathbf{\Theta}^{baru}\right)-L_m\left(\mathbf{\Lambda}^{lama},\mathbf{\Theta}^{lama}\right)\right|>10^{-4}\left|L_m\left(\mathbf{\Lambda}^{lama},\mathbf{\Theta}^{lama}\right)\right|$$

artinya proses belum konvergen, maka nilai Λ^{baru} dan Θ^{baru} dianggap sebagai Λ^{lama} dan Θ^{lama} pada iterasi berikutnya, demikian proses ini dilanjutkan secara iterasi sampai konvergen.

Dengan mengunakan metode EM dihasilkan parameter dari model faktor sebagai berikut:

$$\mathbf{\Lambda}^{baru}=\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_iE\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)'\right)\left(\sum_{i=1}^{n}E\left(\xi_i\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)\right)^{-1}$$

$$\mathbf{\Theta}^{baru}=\frac{1}{n}diag\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i'-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_iE\left(\xi_i\left|\mathbf{X}_i\right.\right)'\mathbf{\Lambda}'\right]$$

Nilai dari $E\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)$ dan $E\left(\xi\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)$ adalah

$$E\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)=\beta\mathbf{X}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{X}$$

$$E\left(\xi\xi'\left|\mathbf{X}\right.\right)=\mathbf{I}-\beta\mathbf{\Lambda}+\beta\mathbf{X}\mathbf{X}'\beta'$$

Maka kovariansnya

$$Cov\left(\xi\left|\mathbf{X}\right.\right)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}'\mathbf{\Theta}^{-1}\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}$$

4. Daftar Pustaka

Bollen, K. A. 1989. *Structural Equation With Latent Variables.* John Wiley Sons, New York.

Johnson, R.A dan Wichern, D.W. 1998. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 5th ed. Prentice Hall Internasional, New Jersey.

Joreskog, K. dan D. Sorbon. 1998. *LISREL 7, User's Reference Guide,* 1*st ed.* Scientific Software Inc, Mooresville.

Long, j. s. 1983. *Confirmatory Factor Analysis, A preface to LISREL.* Sage Publicatins, New York.

Pawitan, Yudi. 2001. *In All Likelihood, Statistical Modelling and Inference using Likelihood*. Clarendon Press OXFORD, New York.

Simamora, B. 2005. *Analisis Multivariat Pemasaran*. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

ftp://ftp.cs.toronto.edu/pub/zoubin/mfa.tar.gz -

faculty.psy.ohio-state.edu/myung/personal/mle-pub.pdf –

www-clmc.usc.edu/ cs599 an/factor analysis.pdf -