DISTRIBUSI PROBABILITAS TOTAL WAKTU BEKERJA SUATU SISTEM

Taryo, Suyono, Dian Handayani*
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKAN DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI JAKARTA

12 Agustus 2007

Abstraksi

Misalkan X_{ij} dan Y_{ij}, $j = 1, 2, ...$, menyatakan waktu bekerja dan waktu perbaikan dari komponen ke-i, $i = 1, 2, ..., n$ suatu sistem. Diasumsikan bahwa barisan (X_{ij}) dan (Y_{ij}) saling independen. Misalkan $U(t)$ menyatakan total waktu bekerja sistem pada interval $[0, t]$. Untuk $n = 1$, X_{1j} dan Y_{1j} keduanya berdistribusi eksponensial, maka dapat diperoleh rumus eksplisit untuk nilai harapan dan variansi dari $U(t)$. Untuk $n \geq 2$, X_{ij} dan Y_{ij} semuanya berdistribusi eksponensial, dapat diperoleh rumus eksplisit untuk nilai harapan dan variansi dari $U(t)$ dengan kondisi distribusi awal distribusi stasioner.

Kata kunci : rantai Markov waktu kontinu, total waktu bekerja sistem, availabilitas sistem.

1 PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bidang statistika berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan, penyajian, dan analisisnya serta penarikan kesimpulan berdasarkan data dan analisis yang telah dilakukan. Kesimpulan yang dihasilkan diharapkan merupakan gambaran tentang populasi dan sifat-sifatnya. Salah satu cara pengumpulan data yaitu dengan melakukan percobaan. Dari percobaan yang dilakukan akan diperoleh hasil yang berkemungkinan, yang memiliki nilai probabilitas. Seluruh hasil yang mungkin dari suatu percobaan dinamakan ruang sampel (*sample space*). Hasil-hasil yang diperoleh dari percobaan tersebut dapat dimodelkan dalam suatu persamaan matematika.

Tujuan dalam pengembangan model matematika adalah untuk menggambarkan probabilitas kejadian yang akan terjadi. Model matematika dapat didefinisikan sebagai suatu variabel acak yang merupakan suatu fungsi yang menghubungkan setiap unsur dalam ruang sampel dengan bilangan real.

Misalkan dengan memodelkan suatu sistem yang tidak selamanya beroperasi, ada kalanya sistem tersebut mengalami kerusakan sehingga memerlukan waktu untuk direparasi. Sebagai ilustrasi adalah sebuah mesin produksi pada suatu perusahaan. Mesin ini tidak terus-menerus beroperasi, ada kalanya rusak, sehingga memerlukan waktu untuk direparasi.

Keefektifan suatu sistem sangat mempengaruhi *performance* sistem itu sendiri dan dapat mengoptimalkan produksi. Ada beberapa ukuran keefektifan dari suatu sistem, diantaranya adalah total waktu bekerja, total waktu perbaikan, availabilitas (*availability*), dan sebagainya.

*Matematika UNJ

Total waktu bekerja menyatakan total waktu sistem beroperasi dalam suatu interval waktu tertentu. Apabila proporsi total waktu bekerja dalam suatu interval waktu adalah besar maka sistem dikatakan efektif atau baik. Total waktu bekerja memiliki sifat acak.

Total waktu perbaikan menyatakan total waktu sistem direparasi atau berhenti bekerja dalam suatu interval waktu tertentu. Apabila proporsi total waktu perbaikan dalam suatu interval waktu adalah kecil maka sistem dikatakan efektif atau baik. Total waktu perbaikan juga memiliki sifat acak.

Availabilitas adalah probabilitas sistem bekerja pada suatu waktu tertentu. Semakin besar availabilitas suatu sistem maka sistem tersebut semakin baik.

Sebuah ekspresi tentang total waktu bekerja suatu sistem yang dapat direparasi, telah diturunkan oleh beberapa penulis dengan metode yang berbeda di bawah asumsi waktu bekerja dan waktu perbaikan merupakan variabel acak yang saling independen. Sebuah metode (yaitu dengan menggunakan proses stokastik) digunakan untuk menentukan distribusi probabilitas total waktu bekerja suatu sistem.

Dalam karya ilmiah ini, topik yang dibahas merupakan pemodelan suatu sistem yang berguna untuk menggambarkan dan mengevaluasi total waktu bekerja sistem itu sendiri pada interval waktu $[0, t]$.

1.2 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan karya ilmiah ini adalah untuk menentukan distribusi probabilitas total waktu bekerja suatu sistem.

2 LANDASAN TEORI

2.1 Probabiitas dan Variabel Acak

Definisi 2.1. *Ruang sampel Ω adalah himpunan dari semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan acak. Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel Ω.*

Untuk mengukur ketidakpastian suatu kejadian digunakan ukuran probabilitas yang merupakan fungsi himpunan dengan sifst-sifat tertentu.

Definisi 2.2. *Ukuran probabilitas P pada $(\mathcal{F}, \Omega)$ merupakan fungsi $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, dimana $\mathcal{F}$ adalah sekumpulan himpunan bagian dari Ω, yang memenuhi*

1. $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$.
2. *P bersifat aditif tak hingga (aditif lengkap), yaitu jika $A_1,\ A_2,\ ... \in F$ dengan $A_j \cap A_k = \emptyset,\ j \neq k$, maka $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Pasangan (Ω, F, P) disebut suatu ruang probabilitas.*

Dua kejadian A dan B disebut saling bebas (independen) jika $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. Secara umum, himpunan kejadian $A_i,\ i \in I$, dengan I adalah suatu himpunan indeks, disebut independen jika $P\left(\bigcap_{i \subseteq J} A_i\right) = \prod_{i=J} P(A_i)$, untuk semua himpunan bagian berhingga $J \subseteq I$.

Ada kalanya peluang terjadinya suatu kejadian dipengaruhi oleh kejadian lain (*conditional probability*).

Definisi 2.3. *Peluang terjadinya kejadian B dengan syarat kejadian A terjadi, dinotasikan dengan $P(B|A)$, didefinisikan sebagai berikut:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

asalkan $P(A) > 0$.

Selain konsep probabilitas, untuk memodelkan fenomena-fenomena yang mengandung ketidakpastian diperlukan konsep variabel acak.

Definisi 2.4. *Variabel acak X adalah suatu fungsi yang mengaitkan setiap elemen dalam ruang sampel S dengan suatu bilangan real, yakni $X(c) = x$, dimana $c \in S$ dan x adalah suatu bilangan real.*

Variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dikatakan independen jika untuk setiap $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ berlaku

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq X_n \leq b_n) = \prod_{i=1}^{n} P(a_i \leq X_i \leq b_i).$$

Suatu variabel acak X dikatakan diskret jika nilainya merupakan bagian dari himpunan yang terbilang (*countable*). Suatu variabel acak X dikatakan kontinu jika nilainya merupakan bagian dari himpunan yang tak terbilang (*uncountable*). Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak X kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du\,;\ x \in R,$$

untuk suatu fungsi $f : R \to [0, \infty)$ yang dapat diintegralkan.
Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak X diskret dapat dinyatakan sebagai:

$$F_X(x) = \sum_{-\infty}^{x} f(u).$$

Selanjutnya fungsi f disebut fungsi kepadatan peluang (*probability density function*) dari X.

Misalkan X dan Y adalah variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel yang sama. Fungsi distribusi bersama $F_{X,Y}$ dari X dan Y didefinisikan sebagai

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Dari fungsi distribusi bersama $F_{X,Y}$ dapat diperoleh fungsi marjinal F_X dan F_Y melalui hubungan:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) \text{ dan } F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y).$$

2.2 Rantai Markov Kontinu

Misalkan $X = \{X(t)\,;\, t \geq 0\}$ adalah suatu koleksi (himpunan) dari variabel acak dengan nilai-nilai di suatu ruang *state* S yang terbilang (*countable*) dan $t \in [0, \infty)$. Selanjutnya akan diasumsikan bahwa $S \subseteq \mathbb{Z}$, dimana $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Proses X disebut **rantai Markov kontinu** jika kondisi berikut ini terpenuhi:

$$P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1) = P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{n-1})$$

untuk semua $j, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ dan sebarang barisan waktu $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Dalam rantai Markov kontinu tidak ada matriks transisi n langkah sebagaimana pada rantai Markov diskret karena tidak ada kepastian waktu transisi dari satu *state* ke *state* lainnya. Sebagai gantinya akan digunakan matriks **generator**. Sebelum menjelaskan matriks generator akan dibahas beberapa pengertian pendahuluan.

Definisi 2.5. ***Probabilitas transisi*** *$p_{ij}(s, t)$ dari rantai Markov kontinu X didefinisikan sebagai*

$$p_{ij}(s, t) = P(X(t) = j | X(s) = i) \ \ untuk\ s \leq t. \tag{2}$$

Rantai Markov disebut **homogen** jika

$$p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s)\,, \text{untuk setiap i, j, s, t,} \tag{3}$$

dan ditulis sebagai $p_{ij}(t - s)$ untuk $p_{ij}(s, t)$.

Untuk selanjutnya rantai Markov X dalam skripsi ini akan dianggap sebagai rantai Markov yang homogen. Matriks dengan ukuran $|S| \times |S|$ dengan elemen-elemen $p_{ij}(t)$ akan dinotasikan dengan $\mathbf{P}_t$.

Teorema 2.1. *Koleksi* $\{\mathbf{P}_t :\ t \geq 0\}$ *merupakan* ***semigrup stokastik****, jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:*

1. $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$*, matriks identitas.*
2. $\mathbf{P}_t$ *adalah matriks stokastik, yakni* $\mathbf{P}_t$ *mempunyai elemen-elemen yang non negatif dan jumlah elemen-elemen pada setiap baris sama dengan* 1.
3. *Matriks* $\mathbf{P}_t$ *memenuhi persamaan* ***Chapman-Kolmogorov****, yakni* $\mathbf{P}_{s+t} = \mathbf{P}_s\, \mathbf{P}_t$ *jika* $s, t \geq 0$.

Untuk selanjutnya probabilitas transisi $p'_{ij}\,(t)$ rantai Markov selalu dianggap kontinu untuk setiap i dan j.

Definisi 2.6. *Semigrup* $\{\mathbf{P}_t\}$ *dikatakan* ***standar*** *jika* $\mathbf{P}_t \to \mathbf{I}$ *untuk* $t \downarrow 0$*, yaitu* $p_{ii}\,(t) \to 1$ *dan* $p_{ij}\,(t) \to 0$ *untuk* $i \neq j$ *jika* $t \downarrow 0$.

Andaikan $X\,(t) = i$ adalah rantai Markov di *state* i pada waktu t. Berbagai hal yang dapat terjadi di interval $(t, t+h)$ untuk h yang kecil adalah

(a) Tidak akan terjadi transisi dengan probabilitas $p_{ii}\,(h) + o\,(h)$, dimana $p_{ii}\,(h)$ menyatakan probabilitas proses berpindah dari *state* i dan kemudian kembali lagi ke *state* i untuk h yang kecil.

(b) Rantai dapat menuju ke *state* baru dengan probabilitas $p_{ij}\,(h) + o\,(h)$.

Diasumsikan di sini bahwa probabilitas dari dua atau lebih transisi pada interval $(t, t+h)$ adalah $o\,(h)$ untuk h kecil dan akan diaproksimasi sebagai fungsi linier dari h (Grimmett dan Stirzaker, 1992). Dengan demikian, ada $\{g_{ij};\ i, j \in S\}$ sedemikian hingga

$$p_{ij}\,(h) \approx g_{ij}\, h \quad \text{jika} \quad i \neq j, \;\; p_{ii}\,(h) \approx 1 + g_{ii}\, h. \tag{4}$$

Jelas bahwa $g_{ij} \geq 0$ untuk $i \neq j$ dan $g_{ii} \leq 0$ untuk setiap i. Matriks $\mathbf{G} = (g_{ij})$ disebut **generator** dari rantai Markov kontinu dan mengambil alih peran dari matriks transisi $\mathbf{P}$ untuk rantai Markov diskret. Dengan asumsi $X\,(t) = i$, kombinasi persamaan (2.5) dengan (a) dan (b) diperoleh

1. Tidak terjadi transisi di $(t, t+h)$ dengan probabilitas $1 +\ g_{ii}\, h + o\,(h)$.
2. Rantai Markov berpindah ke state $j\ (\neq i)$ dengan probabilitas $\ g_{ij}\, h + o\,(h)$.

Karena diharuskan $\sum_j p_{ij}\,(t) = 1$ maka $1 = \sum_j p_{ij}\,(h) \approx 1 + h \sum_j g_{ij}$ yang mengakibatkan

$$\sum\nolimits_j g_{ij} = 0 \quad \text{untuk setiap} \;\; i, \;\; \text{atau} \;\; \mathbf{G}\mathbf{1}' = \mathbf{0} \tag{5}$$

dimana $\mathbf{1}$ adalah vektor baris yang semua elemennya 1 dan $\mathbf{0}$ vektor baris yang semua elemennya 0.

Teorema 2.2. (**Persamaan Forward-Kolmogorov**)

$$p'_{ij}\,(t) = \sum\nolimits_k p_{ik}\,(t)\, g_{kj}, \;\; \textit{atau} \;\; \mathbf{P}'_t = \mathbf{P}_t\, \mathbf{G}, \tag{6}$$

dimana $\mathbf{P}'_t$ *adalah matriks dengan elemen-elemen* $p'_{ij}\,(t)$.

Dengan mengkondisikan $X\,(t+h)$ pada $X\,(h)$ diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 2.3. (**Persamaan Backward-Kolmogorov**)

$$p'_{ij}\,(t) = \sum\nolimits_k g_{ik}\, p_{kj}\,(t)\,, \;\; atau \;\; \mathbf{P}'_t = \mathbf{G}\mathbf{P}_t\,. \tag{7}$$

Dengan menganggap $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$. Hubungan antara $\mathbf{G}$ dan $\mathbf{P}_t$ adalah:

$$\mathbf{P}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{G}^n \tag{8}$$

dan $\{\mathbf{P}_t\}$ dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{P}_t = e^{t\mathbf{G}} \text{ atau } \mathbf{P}_t = \exp\{t\mathbf{G}\}$$

dengan $\mathbf{G}^0 = \mathbf{I}$.

Misalkan X adalah rantai Markov kontinu yang memiliki generator $\mathbf{G}$ dan $X(t) = i$ adalah rantai Markov di *state* i pada waktu t. Misalkan waktu sampai rantai Markov mengubah *state*nya (*holding time*) diberikan oleh:

$$T = \inf\{s \geq 0,\ X(t+s) \neq i\}.$$

Proposisi 2.1. *Holding time T berdistribusi eksponensial dengan parameter $-g_{ii}$.*

Proposisi 2.2. *Probabilitas rantai Markov yang masuk ke state $j\ (\neq i)$ adalah $-g_{ij}\ /\ g_{ii}$.*

Definisi 2.7. *Vektor $\boldsymbol{\pi}$ adalah distribusi stasioner dari suatu rantai Markov kontinu jika $\pi_j \geq 0$, $\sum_j \pi_j = 1$, dan $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}_t$ untuk setiap $t \geq 0$.*

Proposisi 2.3.

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}_t \text{ untuk setiap } t \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi}\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

3 PEMBAHASAN

3.1 Total waktu Bekerja Sistem yang Dipandang Sebagai Sebuah Komponen

Anggap sebuah komponen pada setiap waktu dapat dikategorikan dalam keadaan bekerja (*up*) atau sedang diperbaiki (*down*). Anggap komponen mulai bekerja pada waktu $t = 0$. Setelah bekerja selama X_1 satuan waktu, komponen tersebut gagal dan segera diperbaiki selama Y_1 satuan waktu sehingga komponen tersebut dapat bekerja kembali seperti komponen yang baru. Setelah bekerja lagi selama waktu X_2 komponen gagal lagi dan diperbaiki kembali selama waktu Y_2. Proses ini berlangsung terus menerus dan setiap kali selesai dilakukan perbaikan komponen dianggap seperti baru lagi. Barisan $(X_i, Y_i,\ i \geq 1)$ akan dianggap sebagai barisan vektor acak positif dan berdistribusi independen dan identik.

Untuk menunjukkan apakah komponen bekerja atau tidak, didefinisikan variabel indikator Z, sebagai berikut

$$Z(s) = \begin{cases} 1, & \text{jika pada waktu } s \text{ komponen bekerja} \\ 0, & \text{jika pada waktu } s \text{ komponen diperbaiki.} \end{cases}$$

Jika $Z(t)$ menyatakan komponen bekerja atau gagal pada waktu t, maka total waktu bekerja sistem pada interval waktu $[0, t]$ diberikan

$$U(t) = \int_0^t Z(s)\ ds. \tag{9}$$

Total waktu perbaikan $D(t)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$U(t) = t - D(t). \tag{10}$$

Dalam skripsi ini akan digunakan notasi untuk fungsi-fungsi distribusi kumulatif sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &F(x) = P(X_1 \leq x), \\ &G(y) = P(Y_1 \leq y), \\ &H(x, y) = P(X_1 \leq x, Y_1 \leq y), \\ &K(\omega) = P(X_1 + Y_1 \leq \omega). \end{aligned}$$

Fungsi distribusi kumulatif dari $\sum_{i=1}^{n} X_i$ dan $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ dinotasikan dengan F_n dan G_n. Transformasi Laplace-Stieltjes dari fungsi distribusi kumulatif F dan fungsi distribusi bersama H dinotasikan dengan F^* dan H^* yaitu

$$F^*(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} dF(x)$$

dan

$$H^*(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha x + \beta y)} dH(x, y).$$

Transformasi Laplace dari suatu distribusi kumulatif F dinotasikan $\hat{F}$, yaitu

$$\hat{F}(\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} F(x)\, dx.$$

Jika transformasi Laplace $\hat{F}(\beta)$ dari suatu fungsi $F(x)$ diketahui, maka $F(x)$ dapat diperoleh kembali dengan menginversi transformasi Laplace $\hat{F}(\beta)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{\beta x}\, \hat{F}(\beta)\, d\beta \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\, \hat{F}(\alpha + iu)\, du. \end{aligned}$$

Misalkan $f(x, y)$ adalah fungsi bernilai real non-negatif dari x dan y. Transformasi Laplace ganda dari $f(x, y)$ adalah

$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, e^{-(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

dengan α dan β adalah bilangan real atau komplek, dimana fungsi tersebut dapat diintegralkan.

Distribusi dari total waktu perbaikan sistem diformulasikan melalui transformasi Laplace ganda menurut teorema berikut (Suyono, 2002)

Teorema 3.1. *Untuk* $\beta > 0$

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-\alpha D(t)}\right] e^{-\beta t} dt = \frac{\alpha \left[1 - F^*(\beta)\right] + \beta \left[1 - H^*(\beta, \alpha + \beta)\right]}{\beta (\alpha + \beta) \left[1 - H^*(\beta, \alpha + \beta)\right]}. \tag{11}$$

Sebagai akibat dari teorema ini diperoleh:

Proposisi 3.1. *Untuk* $\beta > 0$

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\left[D(t)\right] e^{-\beta t} dt = \frac{F^*(\beta) - H^*(\beta, \beta)}{\beta^2 \left[1 - H^*(\beta, \beta)\right]}. \tag{12}$$

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\left[D^2(t)\right]e^{-\beta t}dt = \frac{2}{\beta^3}\left[\frac{F^*(\beta)-H^*(\beta,\beta)}{1-H^*(\beta,\beta)} - \frac{\beta\left[1-F^*(\beta)\right]\int_0^\infty\int_0^\infty ye^{-\beta(x+y)}dH(x,y)}{\left[1-H^*(\beta,\beta)\right]^2}\right]. \quad (13)$$

3.1.1 Waktu Bekerja dan Waktu Perbaikan Sistem Berdistribusi Eksponensial

Misalkan X_j dan Y_j, $j = 1, 2, ...$, menyatakan urutan waktu dari waktu bekerja dan waktu perbaikan dari sebuah komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_j) dan (Y_j) saling independen. Diasumsikan juga variabel acak X_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, dan variabel acak Y_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ. Fungsi kepadatan peluang dari X_j dan Y_j adalah

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$$

dan

$$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y},\ y > 0.$$

Karena lama komponen di *state* 0 dan 1 berdistribusi eksponensial maka proses $(Z(t), t \geq 0)$ menyatakan rantai Markov kontinu dengan *state* 0 dan 1. Generator dari rantai Markov ini adalah (Grimmett dan Stirzaker, 1992)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \geq \mathbf{0},\ \text{dan}\ \lambda \neq \mu.$$

Jika $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$ adalah distribusi stasioner dari rantai Markov, maka berdasarkan Proposisi 2.3 berlaku

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{G} = \mathbf{0}$$

dan berdasarkan Definisi 2.7 berlaku

$$\sum_j \pi_j = \pi_0 + \pi_1 = 1. \quad (14)$$

Oleh karena itu

$$\mathbf{0} = (\pi_0 \quad \pi_1)\begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \text{atau} \begin{cases} -\mu\,\pi_0 + \lambda\,\pi_1 = 0 \\ \mu\,\pi_0 - \lambda\,\pi_1 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Jadi distribusi stasioner $\boldsymbol{\pi}$ dari rantai Markov ini adalah

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{\lambda}{(\mu+\lambda)}, \frac{\mu}{(\mu+\lambda)}\right). \quad (16)$$

Berdasarkan persamaan (8), matriks transisi $\mathbf{P}(t)$ untuk rantai Markov ini adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{t^n}{n!}\mathbf{G}^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{(\lambda+\mu)}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right)\begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{(\lambda+\mu)}\begin{pmatrix} \lambda + \mu\, e^{-(\lambda+\mu)t} & \mu\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \\ \lambda\left(1-e^{-(\lambda+\mu)t}\right) & \mu + \lambda\, e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} .\mathbf{3.1.2} \quad Availabilitas Sistem\end{aligned}$$

Misalkan X_j dan Y_j, $j = 1, 2, ...$, menyatakan urutan waktu dari waktu bekerja dan waktu perbaikan dari suatu komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_j) dan (Y_j) saling independen. Diasumsikan juga untuk setiap j, variabel acak X_j berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, dan variabel acak Y_j berdistribusi eksponensial dengan parameter μ. Availabilitas sistem $A_{11}(t)$ pada waktu t didefinisikan sebagai

$$A_{11}(t) = P(Z(t) = 1).$$

Hubungan antara availabilitas sistem $A_{11}(t)$ dan total waktu perbaikan diberikan menurut persamaan:

$$\mathbf{E}[D(t)] = t - \int_0^t A_{11}(s)\, ds. \tag{17}$$

Teorema 3.2. *Jika suatu sistem memiliki waktu bekerja berdistribusi eksponensial dengan parameter λ dan waktu perbaikan berdistribusi eksponensial dengan parameter μ, maka availabilitas sistem untuk suatu komponen $A_{11}(t)$ diberikan sebagai berikut*

$$A_{11}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}. \tag{18}$$

3.1.3 Distribusi Probabilitas Total Waktu Bekerja Sistem Sebuah Komponen

Misalkan X_j dan Y_j, $j = 1, 2, ...$, menyatakan urutan waktu dari waktu bekerja dan waktu perbaikan suatu sistem. Diasumsikan bahwa barisan (X_j) dan (Y_j) saling independen. Diasumsikan juga variabel acak X_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, dan variabel acak Y_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ. Dengan menggunakan persamaan (12), persamaan (13), dan persamaan (11) diperoleh proposisi sebagai berikut:

Proposisi 3.2.

$$\int_0^\infty \mathbf{E}[D(t)]\, e^{-\beta t} dt = \frac{\lambda}{\beta^2[\beta+\lambda+\mu]}, \tag{19}$$

dan

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\left[D^2(t)\right] e^{-\beta t} dt = \frac{2}{\beta^3}\left[\frac{\lambda(\lambda+\beta)}{(\beta+\lambda+\mu)^2}\right]. \tag{20}$$

Invers transformasi Laplace dari persamaan (19) dan persamaan (20), yaitu

$$\mathbf{E}[D(t)] = \frac{\lambda t}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \tag{21}$$

dan

$$\mathbf{E}\left[D^2(t)\right] = \frac{\lambda^2 t^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\lambda(\mu-\lambda)t}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{2\lambda(\lambda-2\mu)+2\lambda[2\mu-\lambda+\mu(\lambda+\mu)t]e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^4}. \tag{22}$$

Dengan menggunakan persamaan (21) dan persamaan (22) diperoleh variansi dari total waktu perbaikan sistem Var $[D(t)]$, yaitu

$$\begin{aligned} \text{Var}[D(t)] &= \mathbf{E}\left[D^2(t)\right] - \{\mathbf{E}[D(t)]\}^2 \\ &= \frac{2\lambda\mu t}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{\lambda(\lambda-4\mu)+2\lambda[2\mu+(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)t]e^{-(\lambda+\mu)t} - \lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^4}. \end{aligned} \tag{23}$$

Karena $U(t) = t - D(t)$, maka

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U(t)] &= t - \mathbf{E}[U(t)] \\ &= \frac{\mu t}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[U^2(t)\right] &= t^2 - 2t\mathbf{E}\left[D(t)\right] + \mathbf{E}\left[D^2(t)\right] \\ &= \tfrac{\mu^2 t^2}{(\lambda+\mu)^2} + \tfrac{4\lambda\mu t}{(\lambda+\mu)^3} + \tfrac{2\lambda(\lambda-2\mu)+2\lambda[2\mu-\lambda-\lambda(\lambda+\mu)t]e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^4}.\end{aligned} \tag{25}$$

Berdasarkan persamaan (24) dan persamaan (25) variansi dari total waktu bekerja sistem Var $[U(t)]$ adalah

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[U(t)\right] &= \mathbf{E}\left[U^2(t)\right] - \{\mathbf{E}\left[U(t)\right]\}^2 \\ &= \tfrac{2\lambda\mu t}{(\lambda+\mu)^3} + \tfrac{\lambda(\lambda-4\mu)+2\lambda[2\mu+(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)t]e^{-(\lambda+\mu)t}-\lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^4}.\end{aligned} \tag{26}$$

3.2 DISTRIBUSI PROBABILITAS TOTAL WAKTU BEKERJA SISTEM YANG TERDIRI DARI $n \geq 2$ KOMPONEN YANG INDEPENDEN

Di dalam bab ini akan dibahas distribusi probabilitas total waktu bekerja sistem yang terdiri dari $n \geq 2$ komponen yang saling independen secara stokastik. Pertama akan dibahas kasus dimana waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen-komponen berdistribusi eksponensial. Selanjutnya akan dibahas kasus dimana waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen-komponen berdistribusi sebarang.

Anggap suatu sistem terdiri dari $n \geq 2$ komponen yang saling independen, dimana komponen-komponennya terdiri dari dua *state*, yaitu 0 (jika komponen dalam perbaikan) dan 1 (jika komponen sedang bekerja). Anggap komponen-komponen mulai bekerja pada waktu $t = 0$. Komponen ke-i, $i = 1, 2, ..., n$, bekerja selama X_{i1} satuan waktu. Apabila komponen tersebut gagal maka segera diperbaiki selama Y_{i1} satuan waktu. Setelah bekerja lagi selama X_{i2} komponen gagal lagi dan diperbaiki lagi selama Y_{i2}. Proses ini berlangsung terus menerus dan setiap selesai dilakukan perbaikan komponen-komponen tersebut dianggap seperti baru lagi.

Misalkan $Z_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, menyatakan *state* dari komponen ke-i. Maka total waktu bekerja sistem pada interval waktu $[0, t]$ adalah

$$U(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{1_n}\left(Z_1(s), ..., Z_n(s)\right) ds \tag{27}$$

dimana 1_n merupakan vektor dengan elemen semuanya satu sebanyak n dan $\mathbf{I}_A$ menyatakan fungsi indikator.

3.2.1 Sistem yang Terdiri dari n Komponen dengan Waktu Bekerja dan Waktu Perbaikan Berdistribusi Eksponensial

Misalkan X_{ij} dan Y_{ij}, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ...$, menyatakan waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen-komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_{ij}) dan (Y_{ij}) saling independen. Diasumsikan juga untuk setiap i, variabel acak X_{ij}, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ_i dan variabel acak Y_{ij}, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ_i. Maka proses $(Z_i(t), t \geq 0)$, $i = 1, 2, ..., n$, merupakan rantai Markov kontinu dengan *state* 0 dan 1. Generator-generator untuk rantai Markov ini adalah

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} -\mu_i & \mu_i \\ \lambda_i & -\lambda_i \end{pmatrix}, \ \ \lambda_i, \mu_i \geq 0, \text{ dan } \lambda_i \neq \mu_i.$$

Misalkan

$$Y_n(t) = \left(Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)\right).$$

Maka $Y_n(t) = (Y_n(t), t \geq 0)$ merupakan rantai Markov dengan waktu kontinu di

$$I = \{0, 1\}^n,$$

yaitu himpunan dari vektor-vektor baris dengan panjang n yang mempunyai elemen-elemen 0 dan atau 1.

Misalkan $a \in I$ adalah *state* dari rantai Markov Y_n. Maka

$$a = (\epsilon_1 (a), \epsilon_2 (a), ..., \epsilon_n (a)),$$

dimana $\varepsilon_j (a) \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, ..., n$. Generator

$$\mathbf{G} = (g_{ab})_{a,b \in I}$$

dari rantai Markov Y_n mempunyai sifat-sifat sebagai berikut. Anggap

$$b = (\epsilon_1 (b), \epsilon_2 (b), ..., \epsilon_n (b)).$$

Jika a dan b mempunyai dua atau lebih elemen yang berbeda, maka $g_{ab} = g_{ba} = 0$. Jika a dan b hanya memiliki satu elemen yang berbeda, maka ada indeks j sedemikian hingga

$$\epsilon_i (a) = \epsilon_i (b) \ \text{ untuk semua } i \neq j$$

dan

$$\epsilon_j (a) = 1 - \epsilon_j (b).$$

Misalkan

$$v_{i,0} = \lambda_i \ \text{ dan } \ v_{i,1} = \mu_i .$$

Maka

$$g_{ab} = v_{j,\epsilon_j(b)} \ \text{ dan } \ g_{ba} = v_{j,\epsilon_j(a)} .$$

Lemma 3.1. *Vektor* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_a)_{a \in I}$ *dengan*

$$\pi_a = v_{1,\epsilon_1(a)} v_{2,\epsilon_2(a)} ... v_{n,\epsilon_n(a)} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}$$

merupakan distribusi stasioner dari rantai Markov Y_n.

Sebagai akibat dari Lemma 4.1.1 diperoleh proposisi berikut (Suyono, 2002)

Proposisi 3.3. *Misalkan* $U(t)$ *adalah total waktu bekerja dari suatu sistem dengan* n *komponen yang independen secara stokastik. Misalkan bahwa komponen ke-* i, $i = 1, 2, ...n$ *mempunyai total waktu bekerja dan total waktu perbaikan yang saling independen dan masing-masing berdistribusi eksponensial dengan parameter* λ_i *dan* μ_i. *Maka*

(a)

$$\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}} [U(t)] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} t,$$

dimana $\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}$ *menyatakan nilai harapan dengan* $\boldsymbol{\pi}$ *distribusi stasioner dari rantai Markov.*

(b) Dengan probabilitas 1,

$$\frac{U(t)}{t} \to \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \ \textit{untuk} \ t \to \infty.$$

3.3 Sistem dengan Dua Komponen

Misalkan X_{ij} dan Y_{ij}, $i = 1, 2$; $j = 1, 2...$, menyatakan waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen-komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_{ij}) dan (Y_{ij}) saling independen. Diasumsikan juga variabel acak X_{ij}, $j = 1, 2...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ_i, dan variabel acak Y_{ij}, $j = 1, 2...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ_i. Karena lama komponen-komponen di *state* 0 dan 1 berdistribusi eksponensial maka proses $(Z_i(t), t \geq 0)$, $i = 1, 2$, merupakan rantai-rantai Markov kontinu dengan ruang *state* $I = \{00, 01, 10, 11\}$. Generator dari rantai Markov ini adalah

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \mu_2 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \mu_1 \\ \lambda_1 & 0 & -(\mu_2+\lambda_1) & \mu_2 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -(\lambda_1+\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Probabilitas Transisi

Misalkan $\boldsymbol{\pi} = (\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11})$ adalah distribusi stasioner dari rantai Markov. Maka menurut Proposisi 2.3 berlaku

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{28}$$

dan menurut Definisi 2.7 berlaku

$$\sum_{a\in I} \pi_a = \pi_{00} + \pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{11} = 1. \tag{29}$$

Jadi distribusi stasioner $\boldsymbol{\pi}$ dari rantai Markov ini adalah

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{(\mu_1+\lambda_1)(\mu_2+\lambda_2)} (\lambda_1\lambda_2,\ \mu_2\lambda_1,\ \mu_1\lambda_2,\ \mu_1\mu_2). \tag{30}$$

Menurut persamaan (8), matriks transisi $\mathbf{P}(t)$ untuk rantai Markov ini adalah

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\, e^{-(\lambda_1+\mu_1)t} + \mathbf{P}_3\, e^{-(\lambda_2+\mu_2)t} + \mathbf{P}_4\, e^{-(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)t}}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)} \tag{31}$$

dengan

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\pi},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mu_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 & -\mu_1\lambda_2 & -\mu_1\mu_2 \\ \mu_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 & -\mu_1\lambda_2 & -\mu_1\mu_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\mu_2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\mu_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\mu_2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \mu_2\lambda_1 & -\mu_2\lambda_1 & \mu_1\mu_2 & -\mu_1\mu_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 & -\mu_1\lambda_2 & \mu_1\lambda_2 \\ \mu_2\lambda_1 & -\mu_2\lambda_1 & \mu_1\mu_2 & -\mu_1\mu_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 & -\mu_1\lambda_2 & \mu_1\lambda_2 \end{pmatrix},$$

dan

$$\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 & -\mu_1\mu_2 & -\mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_2 \\ -\mu_1\lambda_2 & \mu_1\lambda_2 & \mu_1\lambda_2 & -\mu_1\lambda_2 \\ -\mu_2\lambda_1 & \mu_2\lambda_1 & \mu_2\lambda_1 & -\mu_2\lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Probabilitas transisi dari *state* 11 pada waktu 0 ke *state* 11 pada waktu t adalah

$$\begin{aligned} P_{11,11}(t) = \tfrac{1}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)} \big[& \mu_1\mu_2 + \mu_2\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\mu_1)t} + \mu_1\lambda_2 e^{-(\lambda_2+\mu_2)t} \\ & + \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)t} \big] \end{aligned} \tag{32}$$

Perhatikan juga bahwa $P_{11,11}(t)$ merupakan availabilitas suatu sistem yang terdiri dari dua komponen pada waktu t.

3.3.2 Distribusi Probabilitas Total Waktu Bekerja Sistem dengan Dua Komponen

Di bawah distribusi stasioner menurut Proposisi 3.3 (a) berlaku

$$\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U\left(t\right)\right]=\pi_{11}t=\frac{\mu_1\mu_2}{\left(\lambda_1+\mu_1\right)\left(\lambda_2+\mu_2\right)}t.$$

Momen kedua dari $U\left(t\right)$ di bawah distribusi stasioner adalah

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U^2\left(t\right)\right] &= \mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}\left[\int_0^t 1_{\{11\}}Y_2\left(s\right)ds\right]^2\\ &= 2\int_0^t\int_0^s P^{\boldsymbol{\pi}}\left(Y\left(r\right)=11,Y\left(s\right)=11\right)\,drds\\ &= 2\frac{\mu_1\mu_2}{\left(\lambda_1+\mu_1\right)\left(\lambda_2+\mu_2\right)}\int_0^t\int_0^s P_{11,11}\left(s-r\right)\,drds.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (32) diperoleh

$$\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U^2\left(t\right)\right]=\left(\pi_{11}t\right)^2+\sigma^2t+r\left(t\right)$$

dengan

$$\sigma^2=2\frac{\mu_1\mu_2}{\left(\left(\lambda_1+\mu_1\right)\left(\lambda_2+\mu_2\right)\right)^2}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2\right)}+\frac{\lambda_1\mu_2}{\left(\lambda_1+\mu_1\right)}+\frac{\mu_1\lambda_2}{\left(\lambda_2+\mu_2\right)}\right]$$

dan

$$r\left(t\right)=\frac{\lambda_1\lambda_2\left(e^{-\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2\right)t}-1\right)}{\left(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2\right)^2}+\frac{\lambda_1\mu_2\left(e^{-\left(\lambda_1+\mu_1\right)t}-1\right)}{\left(\lambda_1+\mu_1\right)^2}+\frac{\mu_1\lambda_2\left(e^{-\left(\lambda_2+\mu_2\right)t}-1\right)}{\left(\lambda_2+\mu_2\right)^2}.$$

Variansi dari $U\left(t\right)$ di bawah distribusi stasioner diperoleh

$$\mathrm{Var}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U\left(t\right)\right]=\sigma^2t+r\left(t\right). \tag{33}$$

Dari persamaan (33) diperoleh

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U\left(t\right)\right]}{t}=\sigma^2. \tag{34}$$

3.4 Sistem yang Terdiri dari n Komponen dengan Waktu Bekerja dan Waktu Perbaikan Berdistribusi Sebarang

Secara umum sulit untuk memperoleh ekspresi yang tepat untuk distribusi total waktu bekerja sistem yang terdiri dari $n\geq 2$ komponen dimana waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen berdistribusi sebarang. Dalam beberapa kasus mungkin untuk memperoleh ekspresi dari nilai harapan dari total waktu bekerja suatu sistem.

Diasumsikan bahwa untuk setiap i, variabel acak $X_{ij}, j=1,2,...$, mempunyai fungsi distribusi F_i, dan variabel acak $Y_{ij}, j=1,2,...$, mempunyai fungsi distribusi G_i. Notasikan dengan ${F_i}^*$ dan ${G_i}^*$ transformasi Laplace-Stieltjes dari F_i dan G_i. $A_{11}^{(i)}\left(t\right)$ adalah availabilitas sistem dari komponen ke-i pada waktu t. Dari persamaan (27), nilai harapan dari total waktu bekerja sistem, $\mathbf{E}\left[U\left(t\right)\right]$, adalah

$$\mathbf{E}\left[U\left(t\right)\right]=\int_0^t\prod_{i=1}^n A_{11}^{(i)}\left(s\right)\,ds. \tag{35}$$

Dalam beberapa kasus didapat ekspresi analitik untuk availabilitas sistem, yang dapat diperoleh dengan menginversikan transformasi Laplace yang diberikan oleh persamaan (17) sebagai berikut

$$\int_0^\infty A_{11}^{(i)}(t)\, e^{-\beta t}\; dt = \frac{1 - F_i{}^*(\beta)}{\beta\left[1 - F_i{}^*(\beta)\, G_i{}^*(\beta)\right]}, \tag{36}$$

Sebagai contoh ambil $n = 2$. Misalkan X_{1j} berdistribusi eksponensial dengan parameter 2 dan Y_{1j} berdistribusi eksponensial dengan parameter 3. Misalkan juga bahwa X_{2j} berdistribusi Gamma (2,2) yang mempunyai fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = 4xe^{-2x},\ x \geq 0$$

dan Y_{2j} berdistribusi Gamma (3,2). Dengan menggunakan persamaan (36), diperoleh

$$A_{11}^{(1)}(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\, e^{-5t}$$

dan

$$A_{11}^{(2)}(t) = \frac{3}{5} + \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{1}{69}e^{-\frac{5}{2}t}\left[23\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}\,t\right) + 7\sqrt{23}\,\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{23}\,t\right)\right].$$

Dengan menggunakan persamaan (35) diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[U(t)\right] = {} & \tfrac{1413}{7750} + \tfrac{9}{25}t - \tfrac{7}{125}\, e^{-5t} - \tfrac{1}{375}\, e^{-10t} \\ & - \left[\tfrac{1}{10}e^{-\frac{5}{2}t} + \tfrac{11}{465}e^{-\frac{15}{2}t}\right]\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{23}\,t\right) \\ & - \left[\tfrac{1}{230}e^{-\frac{5}{2}t} + \tfrac{41}{10695}e^{-\frac{15}{2}t}\right]\sqrt{23}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{23}\,t\right).\end{aligned}$$

4 PENUTUP

4.1 kesimpulan

Setelah mengetahui distribusi probabilitas dari total waktu bekerja suatu sistem yang telah dibahas pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Misalkan X_j dan Y_j, $j = 1, 2, ...$, menyatakan waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari sebuah komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_j) dan (Y_j) saling independen. Diasumsikan juga variabel acak X_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, dan variabel acak Y_j, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ. Maka $(Z(t), t \geq 0)$ menyatakan rantai Markov kontinu dengan *state* 0 (komponen dalam perbaikan) dan 1 (komponen sedang bekerja). Nilai harapan dan variansi total waktu bekerja suatu sistem adalah

   $$\mathbf{E}\left[U(t)\right] = \tfrac{\mu t}{\lambda+\mu} + \tfrac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$$

   dan

   $$\mathrm{Var}\left[U(t)\right] = \tfrac{2\lambda\mu t}{(\lambda+\mu)^3} + \tfrac{\lambda(\lambda-4\mu)+2\lambda[2\mu+(\mu+\lambda)(\mu-\lambda)t]e^{-(\lambda+\mu)t}-\lambda^2 e^{-2(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)^4}.$$

2. Misalkan X_{ij} dan Y_{ij}, $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ...$, menyatakan waktu-waktu bekerja dan waktu-waktu perbaikan dari komponen-komponen. Diasumsikan bahwa barisan (X_{ij}) dan (Y_{ij}) saling independen. Diasumsikan juga variabel acak X_{ij}, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter λ_i dan variabel acak Y_{ij}, $j = 1, 2, ...$, berdistribusi eksponensial dengan parameter μ_i. Maka $(Z(t), t \geq 0)$, $i = 1, 2, ..., n$, adalah rantai Markov kontinu dengan ruang *state* $I = \{0, 1\}^n$, yaitu himpunan dari vektor-vektor baris sebanyak n yang mempunyai elemen-elemen 0 dan atau 1. Nilai harapan dari total waktu bekerja sistem dengan $\boldsymbol{\pi}$ distribusi stasioner dari rantai Markov adalah

   $$\mathbf{E}^{\boldsymbol{\pi}}\left[U(t)\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} t.$$

4.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penulisan karya ilmiah ini, pembaca dapat melanjutkan pembahasan untuk mencari

1. Distribusi dari total waktu bekerja suatu sistem dengan n komponen berdistribusi sebarang, terutama dalam mencari variansi dari total waktu bekerja suatu sistem.

2. Penerapan distribusi dari total waktu bekerja suatu sistem dalam bidang industri, penerbangan, transportasi, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard., dan Corres, Chris., 2002, *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi*, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Barlow, E. Richard., dan Prochan, Frank., 1975, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Hold, Rinehart, and Winston, New York.

Billingsley, P., 1995, *Probability and Measure*, Edisi ketiga, John Wiley and Sons, New York.

Chung, K. L., 1983, *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer, New Delhi.

Grimmett, G. R., dan Stirzaker, D. R., 1997, *Probability and Random Processes*, Clarendon Pres, Oxford.

Iosifescu, M., 1980, *Finite Markov Processes and Their Applications* , John Wiley and Sons, Newyork.

Kent Nagle, R., dan Saff, B. Edward., 1992, *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Adison-Wesley Publishing Company, Newyork.

Kreyszig, E., 1993, *Matematika Teknik Lanjutan*, Edisi Keenam, Buku 1, Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Lawrence, S. AFT., 1998, *Fundamentals of Industrial Quality Control*, Edisi Ketiga, St Lucie Press, Newyork.

Ross, S. M., 1996, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New York.

Spiegel, M. R., 1999, *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-Soal Transformasi Laplace*, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Suyono, 2003, *Diktat Kuliah Proses Stokastik*, Universitas Negeri Jakarta, Jakarta.

Suyono, 2002, *Renewal Processes and Repairable Systems*, DUP Science, Netherlands.

Trindade, D. C., dan Tobias, P. C., 1995, *Applied Reliability*, Edisi kedua, Chapman and Hall, Newyork.

http://distance-ed.math.tamu.edu/Math640/chapter5/node2.html.

http://en.wikipedia.org/wiki/Continuous-time_Markov_process.

http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform.

www.uwm.edu/~ziyu/ctc.